digiSchool
Éducation

Position relative de deux courbes

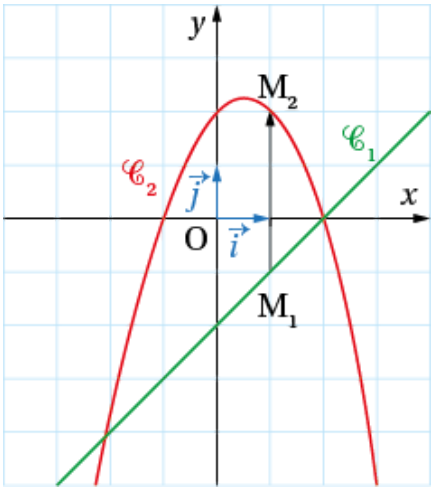
La position relative de deux courbes se résume à l'étude du signe de la différence des ordonnées de deux points de même abscisse de chacune des deux courbes. Cette étude permet, en économie, d'estimer un bénéfice.

I. Définition

Étudier la position relative de deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ revient à savoir sur quel intervalle $\mathscr{C}_1$ est au-dessus (respectivement en dessous) de $\mathscr{C}_2$.

***Exemple* : Sur le graphique ci-dessous, on voit que sur [−2 ; 2]** l'ordonnée de M_2 est supérieure à celle de M_1 on peut donc en déduire que $\mathscr{C}_1$ est en dessous de $\mathscr{C}_2$.

Les fonctions f_1 et f_2 sont définies par $f_1(x) = x - 2$ et $f_2(x) = -x^2 + x + 2$.



II. Propriétés

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes représentatives de deux fonctions f_1 et f_2. On considère deux points M_1 et M_2 de même abscisse x appartenant respectivement à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, leurs ordonnées respectives sont donc $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

- **$\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$** si et seulement si $f_1(x) \geq f_2(x)$ ou encore $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$.
- **$\mathscr{C}_1$ est en dessous de $\mathscr{C}_2$** si et seulement si $f_1(x) \leq f_2(x)$ ou encore $f_1(x) - f_2(x) \leq 0$.

- $\mathscr{C}_1$ **et** $\mathscr{C}_2$ se croisent si et seulement si $f_1(x) = f_2(x)$.

Exemple **: On peut retrouver le résultat obtenu graphiquement précédemment en faisant l'étude du signe de la différence** $f_1(x) - f_2(x)$.

On a alors :

$$f_1(x) - f_2(x) = x - 2 - (-x^2 + x + 2).$$
$$= x^2 - 4$$
$$= (x - 2)(x + 2).$$

On obtient un polynôme du second degré dont les racines sont −2 et 2. On en déduit que cette différence est négative entre les racines, c'est-à-dire sur [−2 ; 2] et positive à l'extérieur des racines, c'est-à-dire sur]−∞ ; −2[et]2 ; +∞[.

$\mathscr{C}_1$ est donc en dessous de $\mathscr{C}_2$ sur [−2 ; 2] et au-dessus sur]−∞ ; −2[et]2 ; +∞[.

Méthode

Étudier la position relative de deux courbes

Conseil

Étape 1. Pour comparer les ordonnées de deux points de même abscisse x, l'un appartenant à $\mathscr{C}_f$ et l'autre à $\mathscr{C}_g$, on calcule $f(x) - g(x)$.

Étape 2. On étudie le signe de cette différence.

Soient *f* et *g* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -2x^2 - x + 5$ et $g(x) = -x + 1$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives.

Étudier la position relative de ces deux courbes sur $\mathbb{R}$.

Solution

Étape 1. Déterminons la différence :

$$f(x) - g(x) = (-2x^2 - x + 5) - (-x + 1)$$
$$= -2x^2 - x + 5 + x - 1$$
$$= -2x^2 + 4$$

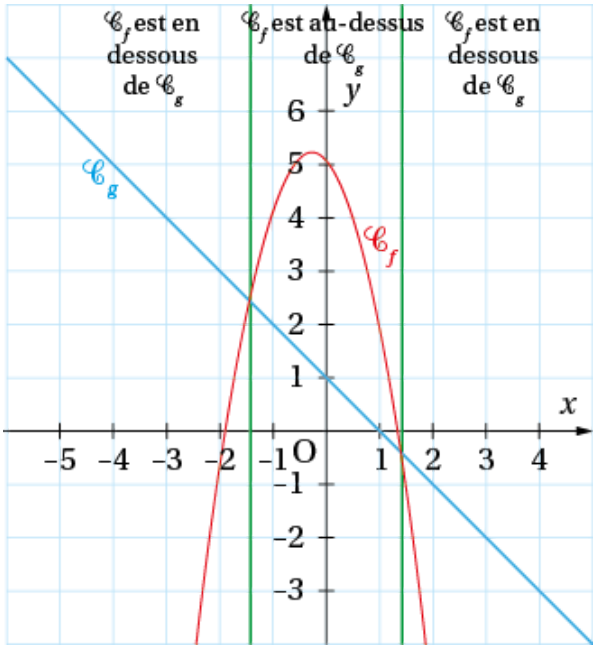
Étape 2. Étudions alors le signe de $f(x) - g(x) = -2x^2 + 4$

Les racines de l'équation du second degré $-2x^2 + 4 = 0$ sont $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

Donc $-2x^2 + 4$ est positif sur $[-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}]$ et négatif sur $]-\infty\,;\,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$. Ainsi :

– si $x \in [-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}]$, $f(x) \geq g(x)$ et **la courbe représentant *f* est située au-dessus de celle représentant *g*** ;

– si $x \in]-\infty\,;\,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ et **la courbe représentant *f* est située en dessous de celle représentant *g***.



Vérifiez que vous avez bien compris les points clés des fiches 17 à 19.