

Les types de nombres

Les nombres réels permettent d'exprimer toute mesure physique et de repérer tous les points d'une droite graduée.

I) Leçon

1) Nombres rationnels et nombres irrationnels

Les **nombres rationnels** sont ceux qui peuvent être exprimés par une fraction de deux nombres entiers relatifs (le dénominateur étant non nul).

D'autres nombres sont dits **irrationnels** car ils ne peuvent pas être exprimés sous cette forme.

L'**ensemble des nombres rationnels et irrationnels** est appelé **ensemble des nombres réels**.

2) Inclusion entre ensembles de nombres

N : ensemble des entiers naturels

Z : ensemble des entiers (ou entiers relatifs)

D : ensemble des décimaux

Q : ensemble des rationnels

R : ensemble des réels.

Relations d'inclusion : $(N \subset Z \subset D \subset Q \subset R)$.

Exemples : $\sqrt{25}$ est un entier naturel (il peut s'écrire 5), donc aussi un entier relatif, un décimal, un rationnel et un réel.

$-\frac{7}{4}$ est un décimal (il peut s'écrire $-\frac{175}{100}$), donc aussi un rationnel et un réel.

$\sqrt{2}$ est un réel, mais n'est pas un rationnel (c'est un irrationnel).

3) Écriture décimale des nombres

L'écriture décimale d'un nombre est son écriture à l'aide d'une **suite de chiffres** (limitée ou non), avec ou sans virgule. Elle permet de caractériser chaque type de nombres.

Suivant la nature du nombre, une écriture décimale possède des caractéristiques spécifiques :

- **Un nombre entier (naturel ou relatif)** peut être écrit sans virgule.

- **Un nombre décimal non entier** peut être écrit avec une virgule et un nombre fini de chiffres à droite de la virgule (le chiffre le plus à droite étant différent de 0).
- **Un nombre rationnel non décimal** peut être écrit avec une écriture décimale illimitée et comportant une suite périodique non nulle à partir d'un certain rang.

Exemple : 1,305231231231... qu'on écrit aussi $1,305\overline{231}$.

- **Un nombre réel non rationnel (irrationnel)** ne peut pas être écrit avec une écriture décimale illimitée et comportant une suite périodique non nulle.

Exemple : 1,202002000200002...

Valeur approchée : tout nombre réel non décimal peut être approché par un nombre décimal.

Sauf indication (par excès ou par défaut), la valeur approchée avec une précision donnée (au dixième, au centième...) est la valeur la plus proche du nombre.

Exemple : La valeur approchée de π (3,141592653...) au dixième près est 3,1 et sa valeur approchée au millièmep près est 3,142.

4) Notation scientifique

Un nombre est écrit en notation scientifique lorsqu'il est écrit sous la **forme** $a \times 10^p$ avec $1 \leq a < 10$ où a est un nombre décimal et p un **nombre entier relatif**.

II) Ce qu'il faut savoir faire

> Écrire sous forme décimale un nombre rationnel non décimal

Exemple : écrire $\frac{34}{7}$ sous forme décimale.

Étapes et solution	
On divise le numérateur par le dénominateur en s'arrêtant dès qu'on trouve un reste déjà obtenu : On constate que le reste 6 a déjà été obtenu. $\frac{34}{7} = 4,857142857142857142... = 4,\overline{857142}$	$\begin{array}{r} 34 \\ 7 \overline{) 60} \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{40} \\ 50 \\ \underline{50} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 30 \\ \underline{30} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 6 \end{array}$

> Écrire sous forme fractionnaire un nombre rationnel non décimal donné sous forme décimale

Exemple : écrire sous forme fractionnaire 2,403

Étapes	Solution
1. On appelle x le nombre donné.	$x = 2,4\overline{03}$ (2,4030303...)
2. On multiplie x par une puissance de 10 de façon à obtenir une partie entière qui englobe la 1 ^{re} apparition de la période.	$1\,000x = 2\,403,030303...$
3. On multiplie par une puissance de 10 de façon à obtenir un résultat dont la partie entière n'englobe pas la période et dont la partie à droite de la virgule commence par cette période.	$10x = 24,030303...$
4. On soustrait le 2 ^e nombre du 1 ^{er} .	$1\,000x - 10x = 2\,403 - 24 = 2\,379$
5. On résout l'équation et on simplifie la fraction obtenue.	$990x = 2\,379$, donc $x = \frac{2\,379}{990} = \frac{793}{330}$ Donc : $2,4\overline{03} = \frac{793}{330}$

III) Je m'entraîne

- Chacun de ces nombres est-il naturel ? relatif ? décimal ? rationnel ? réel ? a. 0,3333 ; b. $-\frac{9}{4}$; c. $\sqrt{121}$; d. $\frac{7}{2}$; e. 7,32
- Quelle est l'écriture scientifique de 458,0075 et de 0,075 ?
- Quelle est l'écriture fractionnaire de 0,5462 ?